

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Методы экстремальной комбинаторики
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Одним из классических утверждений экстремальной комбинаторики является теорема Эрдеша-Ко-Радо 1961 года, которая устанавливает размер наибольшего набора попарно пересекающихся  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества. В докладе мы расскажем об истории проблематики, возникшей в связи с этой теоремой. Мы покажем, что эта проблема находится в самом центре современного комбинаторного анализа, мы продемонстрируем ее связь с теорией кодирования, комбинаторной геометрией и алгебраической топологией. Особое внимание уделим недавней вероятностной интерпретации проблемы - в терминах теории случайных графов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов экстремальной комбинаторики (ЭК): вероятностного метода, линейно-алгебраического метода, топологического метода.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области ЭК;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области ЭК;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области ЭК.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики – ЭК;  
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (ЭК);  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ЭК;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (ЭК).

уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач ЭК, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области ЭК в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ЭК ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;  
 предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Липшицевость.		8		
2	Локальная лемма Ловаса.		8		
3	Метод альтернирования и метод второго момента.		8		
4	Метод альтернирования.		8		
5	Метод первого момента.		8		
6	Неравенство Азумы.		8		
7	Простейшая оценка снизу для величины $m(n)$ , равной наименьшему количеству ребер $n$ -однородного гиперграфа, хроматическое число которого больше двух.		6		
8	Теорема Боллобаша о хроматическом числе случайного графа.		6		30
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Липшицевость.

Мартингалы, отвечающие графам.

2. Локальная лемма Ловаса.

Симметричный случай локальной леммы Ловаса.

3. Метод альтернирования и метод второго момента.

Существование графов с большим хроматическим числом и обхватом.

4. Метод альтернирования.

Улучшенная нижняя оценка диагонального числа Рамсея.

5. Метод первого момента.

Связность случайного графа (верхняя оценка пороговой вероятности).

6. Неравенство Азумы.

Условная вероятность относительно разбиения и условное математическое ожидание. Мартингал.

7. Простейшая оценка снизу для величины  $m(n)$ , равной наименьшему количеству ребер  $n$ -однородного гиперграфа, хроматическое число которого больше двух.

Верхняя оценка  $m(n)$ .

8. Теорема Боллобаша о хроматическом числе случайного графа.

Фазовый переход в эволюционной проблеме заключенного с пространственным взаимодействием.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Вероятностный метод [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Алон, Дж. Спенсер ; пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко .— М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 2013 .— 320 с.
2. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.

### **Дополнительная литература**

1. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2016

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы экстремальной комбинаторики» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики – ЭК;  
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (ЭК);  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ЭК;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (ЭК).

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач ЭК, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области ЭК в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ЭК ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;  
предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример домашнего задания

Верно ли, что для любых множеств  $A$  и  $B$  выполняется равенство

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B?$$

Верно ли, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

Верно ли, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется равенство

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)?$$

Верно ли, что для любых множеств  $A$  и  $B$  включение

$$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B?$$

Пусть  $P = [10, 40]$ ;  $Q = [20, 30]$ ; известно, что отрезок  $A$  удовлетворяет соотношению

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in A)).$$

Найдите отрезок  $A$  максимально возможной длины.

Найдите отрезок  $A$  минимально возможной длины.

О множествах  $A, B, X, Y$  известно, что  $A \cap X = B \cap X$ ,  $A \cup Y = B \cup Y$ . Верно ли, что тогда выполняется равенство  $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$ ?

Пусть  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$  - невозрастающая последовательность множеств. Известно, что  $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$ . Докажите, что  $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$ .

Пусть отрезки  $A, B, C, D$  такие, что  $A \Delta B = C \Delta D$  (симметричные разности равны). Верно ли включение  $A \cap B \subseteq C \cap D$ ?

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Базовый вероятностный метод. Задача Эрдеша – Хайнала о раскраске гиперграфа. Простейшая оценка снизу для величины  $m(n)$ , равной наименьшему количеству ребер  $n$ -однородного гиперграфа, хроматическое число которого больше двух. Верхняя оценка  $m(n)$ .

Метод первого момента. Первая оценка снизу для диагонального числа Рамсея. Оценка сверху для произвольного числа Рамсея (рекуррентное неравенство) и следствия из нее.

Метод первого момента. Связность случайного графа (верхняя оценка пороговой вероятности).

Метод второго момента. Связность случайного графа (нижняя оценка пороговой вероятности).

Метод альтернирования. Улучшенная нижняя оценка диагонального числа Рамсея.

Метод альтернирования. Улучшенная нижняя оценка  $m(n)$ : теорема Бека – Спенсера; теорема Радхакришнана – Сринивасана (б/д, но с идеей).

Метод альтернирования и метод второго момента. Существование графов с большим хроматическим числом и обхватом.

Симметричный случай локальной леммы Ловаса. Применение в задаче про двудольные однородные регулярные гиперграфы. Наилучшая известная нижняя оценка для  $R(s, s)$ . Теорема Брукса и ее обобщение.

Орграфы зависимостей. Несимметричная локальная лемма. Применение в задаче о нижней оценке  $R(3, t)$ .

Хроматическое число случайного графа. Случай  $p = o(1/n^2)$ . Случай  $p = o(1/n)$ . Случай  $p = c/n$ ,  $c < 1$  (задача). Случай  $p = \ln n/n$ . Формулировка теоремы Боллобаха о хроматическом числе случайного графа при  $p = n^{-(\alpha)}$ .

Условная вероятность относительно разбиения и условное математическое ожидание. Мартингал. Неравенство Азумы.

Мартингалы, отвечающие графам. Липшицевость. Доказательство теоремы Боллобаха о хроматическом числе случайного графа при  $p = n^{-(\alpha)}$ .

Теорема Боллобаха о хроматическом числе случайного графа при  $p = 1/2$ .

Линейно-алгебраические методы в комбинаторике.

1. Величина  $m(n, k, t)$  (наибольшее число ребер в  $k$ -однородном гиперграфе на  $n$  вершинах, у которого никакие два ребра не пересекаются по  $t$  элементам). Точное значение для  $m(n, 3, 1)$ : явная конструкция и оценка по индукции. Интерпретация в терминах графа и его числа независимости.

2. Линейно-алгебраическая оценка для  $m(n, 3, 1)$ . Аналогичная оценка для  $m(n, 5, 2)$  и ее асимптотическая неулучшаемость.

3. Общая теорема Франкла – Уилсона для  $m(n, k, k-p)$ . Замечание о непростом «модуле».

4. Пример, когда  $k = n/2$ ,  $p$  – минимальное простое с условием  $k-2p < 0$ . «Пафос» примера. «Точность» примера (оценки сверху и снизу имеют вид  $(1.754... + o(1))^n$ ).

5. Алгоритмическая нижняя оценка числа Рамсея.

Темы для курсовых работ:



1. Хроматические числа пространств. Историческая справка: случай прямой, случай плоскости (верхняя и нижняя оценки, нижние оценки в различных предположениях о виде раскраски, дистанционные графы с хроматическим числом 4 и заданным обхватом), верхние оценки в любой размерности, простейшие нижние оценки и пр.
2. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для  $m(n,k,t)$ . Возможные улучшения.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.